Ableitung einiger Formeln Pikettys

Friedrun Quaas & Georg Quaas, Juli 2015

Dieses Papier hat das Ziel, die von Piketty in seinem Buch „Das Kapital im 21. Jahrhundert“ verwendeten Formeln verständlich zu machen. Die einzelnen durchnummerierten Abschnitte bauen nicht aufeinander auf und stehen zueinander in keinem systematischen Zusammenhang. In jedem Abschnitt wird eine Formel thematisiert, wobei die Ableitung jeweils einem bestimmten theoretischen Ansatz folgt. Der Autor eines Abschnittes ist mit einem Kürzel angegeben worden. In den Abschnitten 1, 6 und 8 wird unterstellt, dass Piketty's „Weltformel“ r>g mit Hilfe der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion abgeleitet werden kann. In diesem Zusammenhang wird unter Berufung auf Douglas (1976, pp.912-913) zwischen der Produktionsfunktion und der darauf aufbauenden Verteilungsregel unterschieden. Wenngleich Douglas meint, dass sich beide Hypothesen gegenseitig stützen, ist der Autor dieser Abschnitte aufgrund seiner empirischen Schätzungen nicht davon überzeugt. Auf der Grundlage einer strengen Unterscheidung zwischen beiden Hypothesen wird behauptet, dass die Produktionsfunktion rein technisch-technologischer Art ist und in keinem zwingenden Zusammenhang zum neoklassischen Paradigma steht. Die Abschnitte 2, 3 und 4 verwenden einfache definitorische Gleichungen, die in dieser Weise in der Literatur verschiedener Schulen, aber auch in den modernen Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen zu finden sind. Selbstverständlich können auch diese Formeln aus mathematik-, um nicht zu sagen: wissenschaftsfeindlicher Perspektive infrage gestellt und als „Ideologie“ gebrandmarkt werden – eine Position, die die Autoren nicht teilen. Der Abschnitt 4 enthält übrigens eine Kritik an einer der Formeln Pikettys, die diese zwar nicht grundsätzlich dispensiert, aber deren Begründung wegen nicht plausibler Datierung der Variablen korrigiert. Abschnitt 5 zeigt dann, dass die komplizierten Überlegungen des 4. Abschnittes wesentlich kürzer und einfacher absolviert werden können. Von ebenso eleganter Einfachheit ist die Ableitung einer Piketty-Formel aus dem post-keynesianischen Grundmodell im Abschnitt 7. Der folgende Abschnitt 8 geht von der CD-Pf in ihrer Gänze aus, um zumindest grob die Grenzen der „Weltformel“ abzuschätzen. Abschnitt 9 resümiert die Überlegungen, indem die wichtigsten Formeln noch einmal zusammengefasst werden. Abschnitt 10 ist eine erste, sehr dürftige Sammlung von Belegen, die in der weiteren Forschungsarbeit wesentlich erweitert werden wird. Abschnitt 11 soll eine gewisse Orientierung geben, worauf sich die Forschung des Forschungsseminars „Politik und Wirtschaft“ konzentrieren sollte. Dadurch wird auch deutlich gemacht, worin die Autoren die Desiderata des diskutierten Buches sehen.

Dieses Papier spiegelt den Erkenntnisstand der Autoren im Juli 2015 wider. Wir verdanken der Diskussion im Erwägungsseminar „Ökonomische und politische Bedingungen der Globalisierung“ (Sommersemester 2015) und im Forschungsseminar „Politik und Wirtschaft“ (Sommersemester 2015) wesentliche Anregungen, um unsere Darstellungen zu präzisieren, und möchten uns dafür und für das lebhafte Interesse an dieser ansonsten trockenen Ausarbeitung herzlich bedanken.

1. Ableitung der Formel r > g (G.Q.)

Im Wirtschaftsdienst (2015/5) behaupte ich, dass Pikettys konfliktschwangere Formel $g < r$ eine Konsequenz der 1928 erfundenen Cobb-Douglas-Produktionsfunktion, also rein technischer Art ist. Frank Fehlberg vermutet, dass sich Piketty vom neoklassischen Modell (Solow) leiten lässt (bereits im Protokoll zum Erwägungsseminar vom 17.4.2015 erwähnt). Beide Annahmen sind vereinbar. Nach F. Quaas gehört die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion eindeutig zur Neoklassik (aufgrund der Grenzproduktivitätstheorie der Verteilung, die dem Marginalitätsprinzip folgt). Um die Theoriezugehörigkeit zu entscheiden, hier die bislang einfachste Ableitung:

Für den Zusammenhang zwischen Nettoinvestition *I* und Kapitalstock *K* gilt:

$$I = \Delta K \, , \tag{1}$$

wobei das griechische Delta wie üblich den Zuwachs bezeichnet. Die den Output steigernde Wirkung der Nettoinvestition kann über eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

$$Y = AL^k K^j \tag{2}$$

abgeschätzt werden (über die Parameter k und j wird hier lediglich vorausgesetzt, dass sie kleiner als 1 sind, siehe unten!). Unter der vereinfachenden Bedingung stagnierender (konstanter) Beschäftigung ergibt sich für die Änderung des Einkommens aufgrund einer Stärkung des Kapitalstocks durch zusätzliche Investitionen in erster Näherung und mit Hilfe der ersten Ableitung:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta K} \approx j \frac{Y}{K} \tag{3}$$

Nach einer einfache Umstellung dieser Gleichung:

$$\frac{\Delta Y}{Y} \approx j \frac{\Delta K}{K} = j \frac{I}{K} \tag{4}$$

Der linke Term ist die Wachstumsrate (des Volkseinkommens):

$$g = \frac{\Delta Y}{Y} \tag{5}$$

In der theoretischen Literatur wird idealerweise unterstellt, dass Arbeitnehmer nur konsumieren und Vermögensbesitzer nur investieren. Akzeptiert man dies, ist

$$I = Y_V \, . \tag{6}$$

Akzeptiert man dies nicht, wie Richard Scholz mit seinem Einwand im Forschungsseminar, so gilt:

$$I < Y_V \;.$$[1] (7)

Diese unterschiedlichen Annahmen lassen sich zusammenfassen zu:

$$I \leq Y_V \tag{8}$$

Berücksichtigt man (5) und (8), erhält man aus (4):

$$g = \frac{\Delta Y}{Y} \approx j\frac{\Delta K}{K} = j\frac{I}{K} \leq j\frac{Y_V}{K} = jr \tag{9}$$

mit der Kapitalrendite

$$r = \frac{Y_V}{K} \;. \tag{10}$$

Für die Exponenten in der PF wird im Allgemeinen

$$k + j = 1 \tag{11}$$

angenommen. Da dies empirisch oft nicht zutrifft, kann man diese Bedingung reduzieren zu $k, j < 1$.

Unter den angegebenen Voraussetzungen erweist sich Pikettys Formel als Konsequenz der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion.

Ich mache darauf aufmerksam, dass in dieser Ableitung kein einziges Mal das Marginalitätsprinzip angewandt wird. Insbesondere ist NICHT vorausgesetzt worden, dass durch die erste Ableitung der Produktionsfunktion die Verteilung bestimmt wird. Die Gleichung (10) ist eine reine Definition, die keinerlei substanzielle ökonomische Theorie voraussetzt.

2. Ableitung einer zweiten Formel (G.Q.):

$$\alpha = \frac{Y_V}{Y} = \frac{Y_V}{K}\frac{K}{Y} = r \cdot \beta$$

Definitionen:
$\alpha =$ Anteil des Einkommens aus Vermögen am Volkseinkommen
$r = \frac{Y_V}{K}$, Kapitalrendite
$\beta = \frac{K}{Y}$, Verhältnis von Kapitalstock zum (Volks-) Einkommen, üblicherweise als Kapitalkoeffizient bezeichnet, der hier allerdings auf das Volkseinkommen bezogen wird, was wiederum nicht so üblich ist.

---

[1] Berücksichtigt man, dass auch die Arbeitnehmer sparen, so muss man einräumen, dass die Nettoinvestitionen auch größer als die Vermögenseinkommen sein können.

Auch bei dieser Ableitung kann man nichts erkennen, was typisch neoklassisch wäre.

3. Vorläufige Ableitung einer dritten Formel (G.Q.):

$$\beta = \frac{K}{Y} = \frac{\sum \Delta K_t}{\sum \Delta Y_t} = \frac{\sum I_t}{\sum \Delta Y_t} = \frac{\sum S_t}{\sum \Delta Y_t} = \frac{\frac{1}{n}\sum S_t}{\frac{1}{n}\sum \Delta Y_t} = \frac{\bar{S}}{\Delta \bar{Y}} = \frac{\frac{\bar{S}}{Y}}{\frac{\Delta \bar{Y}}{Y}} = \frac{\hat{s}}{\hat{g}}$$

Definitionen:
$\hat{s}$ durchschnittliche Ersparnis je aktuelles Volkseinkommen
$\hat{g} =$ durchschnittliches Wachstum je aktuelles Volkseinkommen

In der Ableitung wird deutlich, dass es sich um einen langfristigen Zusammenhang handelt.

4. Pikettys Ableitung – Rekonstruktion (G.Q.)

Im technischen Anhang leitet Piketty den letzten Zusammenhang unter der Voraussetzung, dass

$$I = S$$

wie folgt ab (geänderte Notation!):

$$K_{t+1} = K_t + S_t \tag{1}$$

→

$$\frac{K_{t+1}}{Y_{t+1}} = \frac{K_t + S_t}{Y_{t+1}} \tag{2}$$

Definitionen: $\frac{K_{t+1}}{Y_{t+1}} = \beta_{t+1}$ und $\frac{K_t}{Y_t} = \beta_t$ (3)

Nach (2) und (3):

$$\beta_{t+1} = \frac{K_t + S_t}{Y_{t+1}} = \frac{K_t}{Y_t}\left(\frac{K_t}{Y_{t+1}}\frac{Y_t}{K_t} + \frac{S_t}{Y_{t+1}}\frac{Y_t}{K_t}\right) \tag{4a}$$

$$\beta_{t+1} = \beta_t\left(\frac{K_t}{Y_{t+1}}\frac{Y_t}{K_t} + \frac{S_t}{Y_{t+1}}\frac{Y_t}{K_t}\right) = \beta_t\left(\frac{1}{1+g_t} + \frac{1}{1+g_t}\frac{S_t}{K_t}\right) \tag{4b}$$

$$\beta_{t+1} = \beta_t\left(\frac{1}{1+g_t} + \frac{1}{1+g_t}\frac{s_t Y_t}{K_t}\right) = \beta_t \frac{1+\frac{s_t}{\beta_t}}{1+g_t} \tag{5}$$

Fall 1: $\frac{s_t}{\beta_t} > g_t \rightarrow \beta_{t+1} > \beta_t$

Ein hinreichend hoher Kapitalkoeffizient nimmt ab.

Fall 2: $\frac{s_t}{\beta_t} < g_t \rightarrow \beta_{t+1} < \beta_t$

Ein kleiner Kapitalkoeffizient tendiert zum Wachsen.

Fall 3: $\frac{s_t}{\beta_t} = g_t \rightarrow \beta_{t+1} = \beta_t = const.$ (Gleichgewicht)

Kritik:

1. Der Output *Y* ist eine kumulative Größe, die erst am Jahresende vorliegt: *Y* ist ein Jahresendwert.

2. Daraus ergibt sich eine Kritik an Pikettys Definition der Wachstumsrate.Richtig wäre: $\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = 1 + g_{t+1}$.

3. Nach (1) ist *K* ein Jahresanfangswert. In den Definitionen (3) wird ein Jahresanfangswert auf einen Jahresendwert bezogen – das ist inkonsistent.

Eine mögliche Richtigstellung der Ableitung von Formel 3 besteht darin, das Kapital als Jahresendwert zu definieren:

$$K_{t+1} = K_t + S_{t+1} \tag{1*}$$

$$\frac{K_{t+1}}{Y_{t+1}} = \frac{K_t + S_{t+1}}{Y_{t+1}} \tag{2*}$$

Die Definitionen (3) sind jetzt nicht mehr inkonsistent. (3*)

$$\beta_{t+1} == \beta_t \left(\frac{K_t}{Y_{t+1}} \frac{Y_t}{K_t} + \frac{S_{t+1}}{Y_{t+1}} \frac{Y_t}{K_t} \right) \tag{4*}$$

$$\beta_{t+1} = \beta_t \left(\frac{1}{1+g_{t+1}} + \frac{1}{1+g_{t+1}} \frac{s_{t+1} Y_{t+1}}{K_t} \right) = \beta_t \frac{1 + \frac{s_{t+1}(1+g_{t+1})}{\beta_t}}{1+g_{t+1}} \tag{5}$$

$$\beta_{t+1} = \frac{\beta_t}{1+g_{t+1}} \left(1 + \frac{s_{t+1}}{\beta_t} + \frac{s_{t+1} g_{t+1}}{\beta_t} \right) \tag{6a}$$

Alternativ:

$$\beta_{t+1} = \frac{\beta_t}{1+g_{t+1}} + s_{t+1} \qquad (6b)$$

Das Kapital-Einkommen-Verhältnis wird „automatisch“ in dem Maße verringert, wie *Y* wächst. Eine Sparquote > 0 wirkt dieser Verminderung entgegen. Ein Gleichgewicht stellt sich ein bei:

$$\frac{\beta_t}{1+g_{t+1}} + s_{t+1} = \beta_t \qquad (7a)$$

$$s_{t+1} = \beta_t \frac{g_{t+1}}{1+g_{t+1}} \approx \beta_t g_{t+1} \qquad (7b)$$

Also dann, wenn die zukünftige Ersparnis zur zukünftigen Wachstumsrate dem gegenwärtigen Kapital-Einkommen-Verhältnis entspricht.

$$\beta_t \approx \frac{s_{t+1}}{g_{t+1}}. \qquad (8)$$

5. **Kurze Ableitung der Gleichgewichtstendenz (F. Q.):**

$$\frac{s}{g_k} = \frac{\frac{Y-C}{Y}}{\frac{I}{K}} = \frac{S}{Y}\frac{K}{I} = \frac{K}{Y} = \beta$$ wegen $I = S$ in geschlossenen Volkswirtschaften.

6. **Differenzierung der Wachstumsrate (G.Q.)**

Ausgangspunkt ist eine (verallgemeinerte) Cobb-Douglas-Produktionsfunktion bei neutralem technischen Fortschritt (Solow 1957):

$$Y = Ae^{g_T t} L^k K^j$$

mit *Y* = (Netto-) Nationaleinkommen, *A* Produktivitätsniveau, g_T Rate des durch den technischen Fortschritts verursachten Wachstums, $t =$ Zeit, *L* = Arbeit, *K* = Kapitalstock.

Die Verallgemeinerung besteht in der Lockerung der Bedingung

$$k + j = 1,$$

an deren Stelle die beiden Einschränkungen

$$k, j < 1 \qquad (*)$$

für die Elastizitäten k und j treten.

Wir definieren den dreidimensionalen Raum $G^4 = (Y, t, L, K)$ geordneter Quadrupel.

Die C-D-Pf spannt eine Fläche in G^4 auf. Wir definieren den Gradienten auf dieser Fläche:

$$\nabla Y = \frac{\partial Y}{\partial t}\vec{e}_t + \frac{\partial Y}{\partial L}\vec{e}_L + \frac{\partial Y}{\partial K}\vec{e}_K = g_T Y\,\vec{e}_t + k\frac{Y}{L}\vec{e}_L + j\frac{Y}{K}\vec{e}_K$$

Definitionen/Erläuterungen:

$\beta_{Piketty} = \frac{K}{Y} =$ Kapital-Einkommen-Verhältnis, bewegt sich empirisch zwischen 4 und 7, maximal 10 (nach Thomas Piketty).

$\frac{L}{Y} =$ Arbeit-Einkommen-Verhältnis (unter Einkommen wird das Nettonationaleinkommen verstanden). Dieses Verhältnis ignoriert Piketty.

Multipliziert man es mit dem durchschnittlichen Lohnsatz *w*, ergibt sich der Anteil des Faktors Arbeit am Nationaleinkommen:

$sh_L = \frac{H}{Y} = \frac{wL}{Y}$, wobei *H* ein Indikator für das Humankapital ist.

Es sei $\Delta c = (\Delta t \quad \Delta L \quad \Delta K) = (1 \quad \Delta L \quad \Delta K)$ eine Änderung des Faktoreinsatzes während einer Produktionsperiode, der vom technologischen Fortschritt begleitet wird. Dabei ergibt sich eine Veränderung des Einkommens zu:

$$\Delta Y = \nabla y \Delta c$$

Die Wachstumsrate des Nationaleinkommens g_Y wird definiert und berechnet durch:

$$g_Y = \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\nabla y \Delta c}{Y} = g_T + k\frac{Y}{L}\frac{\Delta L}{Y} + j\frac{Y}{K}\frac{\Delta K}{Y} = g_T + k\frac{\Delta L}{L} + j\frac{\Delta K}{K}$$

Analog zur Definition der Wachstumsrate des Einkommens und des durch technischen Fortschritt verursachten Wachstum lassen sich Wachstumsraten des Humankapitals und des Kapitalstocks wie folgt definieren:

$$g_H = \frac{\Delta L}{L} = \frac{w\Delta L}{wL} = \frac{\Delta H}{H} \text{ und } g_K = \frac{\Delta K}{K}$$

Mit diesen Definitionen ergibt sich aus der obigen Ableitung der zusammenfassende Ausdruck:

$$g_Y = g_T + kg_H + jg_K \qquad (*)$$

Und es stellt sich die Frage, von welchem *g* spricht Piketty eigentlich? Höchstwahrscheinlich von g_Y .

Der oben bereits abgeleitete Zusammenhang mit der Profitrate *r*:

$$g = \frac{\Delta Y}{Y} \approx j\frac{\Delta K}{K} = j\frac{I}{K} \leq j\frac{Y_V}{K} = jr$$

muss jetzt wie folgt präzisiert werden:

$$g_K \leq r\,. \qquad (**)$$

Damit wird aus (**):

$$g_Y \leq g_T + kg_H + jr$$

Wegen (**) dürfte klar sein, dass der Wachstumsbeitrag des Kapitalstockes stets kleiner als die Profitrate ist. Dies drückt die mit seiner Größe nachlassende Grenzleistungsfähigkeit des Kapitalstockes aus. Das Wachstum des Nationaleinkommens hängt neben der gewichteten Profitrate *r* direkt vom technischen Fortschritt ab, der sich im niedrigen Prozentbereich bewegt, sowie vom Wachstum des Humankapitals, das mit $k < 1$ gewichtet wird. (Fortsetzung siehe Abschnitt 8.)

7. Ableitung einer Piketty-Formel aus dem postkeynesianischen Grundmodell (F. Q.)

Die Konsumneigung der Unternehmer beeinflusst das Profitniveau und damit die Verteilung des Nettoproduktionswerts auf Löhne und Gewinne. Die Profitrate ergibt sich als das Verhältnis der Akkumulationsrate (Wachstumsrate) zur Sparneigung aus Profiten:

Profitrate r=P/K, P Profite
Wachstumsrate g=I/K, I Investitionen mit $I=s_P \cdot P$ (s_p Sparneigung aus Profiten)

$r=P/K = P\cdot g/I = P\cdot g/s_P\cdot P = g/s_P$

Da die Sparneigung aus Profiten bei Konsumneigung der Unternehmer immer kleiner als 1 ist, gilt r>g.

8. **Wann tritt r < g auf? Eine Abschätzung (G.Q.)**

„There is no logical necessity for the rate of return to exceed the growth rate…” (Solow 2014)

Unter der Bedingung starker Kapitalkonzentration in den Händen weniger Kapitaleigner ist der Konsumanteil am Profit gering, so dass eine hohe Sparquote aus Profiten $s_P \approx 1$ vorliegt. Folglich ist $r \approx g_K$. Aus der Gleichung (*) folgt:

$$g_Y \approx g_T + kg_H + jr \overset{?}{>} r$$

$$\frac{g_T + kg_H}{(1-j)} \overset{?}{>} r$$

Setzt man weiterhin die Gültigkeit der Gleichung (11) voraus, so folgt daraus eine Bedingungsgleichung:

$$\frac{g_T}{k} + g_H > r$$

Wird außerdem die Hypothese $j = \alpha$ (siehe Abschnitt 2) angenommen, so kann man folgendes Zahlenbeispiel konstruieren, dessen Vorkommen empirisch gering wahrscheinlich ist: Das Wachstum kann bei sehr schnellem technischen Fortschritt (>3%), geringer Lohnquote $k = 1 - j$ (<1/2) und stark wachsendem Humankapital (4%) größer als r (8%) sein (die Zahlen dienen nur zur Illustration).

9. **Resümee (G.Q.)**

In allen weiteren Diskussionen zu Piketty sollten die Wachstumsraten (Einkommen, technologischer Fortschritt, Humankapital, Kapitalstock) präzise unterschieden werden. Dasselbe gilt für die beiden Sparquoten, die hier im Spiel sind (Sparen aus dem Einkommen und aus Profiten).

An die Stelle der zwar viel zitierten, aber ungenauen Formel *r* > *g* sollte die exakte Formel treten:

$$g_Y = g_T + kg_H + jg_K \qquad (*)$$

Unter der realistischen Bedingung, dass Kapitaleigner konsumieren, gilt:

$$g_K \leq r \,. \qquad (**)$$

Wenn jedoch Arbeitnehmer sparen, könnte auch das Gegenteil der Fall sein.

Ein Gesetz (Tautologie) ist der Zusammenhang:

$$\alpha = r \cdot \beta \qquad (***)$$

Langfristig und bei ungestörtem Wachstum nähert sich der Kapitalkoeffizient dem Verhältnis:

$$\beta = \frac{s_y}{g_K} \qquad (\#)$$

Etwas unhandlich ist die folgende Formel, da die Sparquoten aus Profiten nur sehr umständlich zu berechnen sind:

$$r = \frac{g_K}{s_P} \qquad (\#\#)$$

Möglicherweise ergeben sich weitere interessante Formeln, wenn man die Formeln kombiniert. Zum Beispiel folgt aus (**) und (***)

$$g_K \beta \leq r\beta = \alpha$$

Und damit eine Abschätzung für das Wachstum des Kapitalstockes:

$$\frac{\alpha}{\beta} \geq g_K .$$

10. **Interpretationen**

Zu Formel (***):

„Suppose we accept Piketty's educated guess that the capital-income ratio will increase over the next century before stabilizing at a high value somewhere around 7. Does it follow that the capital share of income will also get bigger? Not necessarily: remember that we have to multiply the capital-income ratio by the rate of return, and the same law of diminishing returns suggests that the rate of return on capital will fall. As production becomes more and more capital-intensive, it gets harder and harder to find profitable uses for additional capital, or easy ways to substitute capital for labor. Whether the capital share falls or rises depends on whether the rate of return has to fall proportionally more or less than the capital-income ratio rises." (Solow 2014)

Zu Formel #:

"Wenn eine Volkswirtschaft einen bestimmten Anteil ihres Volkseinkommens spart, wächst das Vermögen, das ja durch die Akkumulation dieser Ersparnis gebildet wird, langfristig ebenfalls mit derselben Rate, mit der das Volkseinkommen wächst. Das Verhältnis von Vermögen und Einkommen kann also gar nicht dauerhaft ansteigen.“ (Sinn 2015) Das behauptet Piketty auch nicht (GQ).

11. **Forschungsaufgaben**:

1. Identifizierung der Variablen, die Piketty verwendet
2. Aufarbeitung der Literatur zum Humankapital und zum Bevölkerungswachstum mit dem Ziel, den Wachstumsbeitrag des Humankapitals zu eruieren.
3. Abschätzung des technologischen Fortschritts – länderbezogen oder/und weltweit.

4. Welche Konsequenzen ergeben sich für das Wachstum des Volkseinkommens, wenn der Kapitalkoeffizient langfristig eine Quasi-Konstante ist?
5. Unterscheidung zwischen Kapitalakkumulation und Kapitalkonzentration. Analyse der Prozesse, die einer Kapitalkonzentration entgegen wirken (können).

Literatur:

Douglas, Paul H. (1976): The Cobb-Douglas Production Function Once Again: Its History, Its Testing, and Some New Empirical Values. In: Journal of Political Economy, 1976, Vol. 84, No. 5.
Piketty, Thomas (2014): Das Kapital im 21. Jahrhundert. München.
Quaas, Georg (2007): Das „saldenmechanische Modell“ von Fritz Helmedag und die Empirie. In: Wirtschaftsdienst. 87. Jg., H.6., S.406-412.
Quaas, Georg (2015): Der Preis zusätzlichen Wachstums – lang- und kurzfristige Effekte staatlicher Investitionen. Wirtschaftsdienst 95. Jg., Heft 5, S.350-358.
Sinn, Hans-Werner (2015): Ungleichheit ist nicht so einfach, wie Thomas Piketty glaubt. Gastbeitrag Frankfurter Allgemeine vom 8. Juli 2015.
Solow, Robert M. (1957): Technical Change and the Aggregate Production Function. In: The Review of Economics and Statistics, Vol. 39, No. 3, pp. 312-320.
Solow, Robert M. (2014): Thomas Piketty Is Right. Everything you need to know about ‘Capital in the Twenty-First Century’. The New Republic (URL: http://www.newrepublic.com). 22. April 2014.